Задание № 12 Числовые ряды с произвольными слагаемыми

*Задание может быть выполнено либо в формате документа Word, либо в виде фотографии выполненного на бумаге решения.*

**25.7 Абсолютная и условная сходимость**

Если ряд  содержит лишь конечное количество отрицательных слагаемых (остальные положительны), то перейдя к соответствующему остатку ряда, получим ряд с положительными слагаемыми, к которому применимы все признаки сходимости лекции 10. Если ряд содержит лишь конечное количество положительных слагаемых (остальные отрицательны), то также переходя к соответствующему остатку  и умножив его на , снова получим ряд  с положительными слагаемыми. Таким образом, представляет интерес только случай, когда ряд содержит бесконечное количество как положительных, так и отрицательных слагаемых.

**М25.7.1 Определение.** Ряд называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд из его абсолютных величин .

**М25.7.2 Теорема (сходимость и абсолютная сходимость)** Абсолютно сходящийся ряд сходится.

*Доказательство.* Поскольку ряд  сходится, то по критерию Коши (М3.1.5) для любого найдется номер  такой, что для любых выполняется неравенство .

Пусть задано некоторое . Поскольку , то для ряда  выполняется критерий Коши и ряд сходится.

**М25.7.3 Пример**. Проверить сходимость ряда .

*Решение.* Рассмотрим ряд из абсолютных величин : . Обобщенный гармонический ряд  сходится (М25.4.3). По признаку сравнения М25.5.1 ряд  тоже сходится. По теореме М25.1.2 сходится и ряд .

**М25.7.4 Определение.** Сходящиеся, но не абсолютно сходящиеся ряды называются *условно сходящимися* рядами.

**25.8 Знакочередующиеся ряды**

**М25.8.1 Определение**. *Знакочередующимся рядом* будем называть ряд или ряд  при .

**М25.8.2 Теорема Лейбница (Сходимость знакочередующегося ряда)** Если для  выполняется условие  и при этом , то знакочередующийся ряд сходится.

*Доказательство.* Рассмотрим ряд  и его частичную сумму . Из условия  следует, что все разности в скобках положительны и последовательность частичных сумм  возрастает. С другой стороны,  и из того же условия  следует, что . Таким образом, возрастающая последовательность  ограничена сверху и, значит, имеет предел, который мы обозначим .

Рассмотрим теперь частичную сумму . Поскольку, по условию теоремы, , а по доказанному, , то . Таким образом, существует и конечен предел любых частичных сумм рассматриваемого ряда, то есть ряд сходится.

Поскольку , то теорема доказана и для ряда .

**М25.8.3 Пример.** Проверить сходимость ряда .

*Решение.* равен 1 при четных значениях  и равен  при нечетных значениях . Значит,  и . Поскольку  и , то, по теореме Лейбница, ряд сходится.

**М25.8.4** *Замечание.* Из условия  следует, что остаток  ряда  меньше модуля первого слагаемого остатка: . Это позволяет использовать знакочередующиеся ряды в приближенных вычислениях. То же касается и ряда .

**М25.8.5 Пример.** Вычислить сумму ряда  с точностью до 0,01.

*Решение.* В соответствии с замечанием М11.2.5 найдем слагаемое ряда , по модулю не превосходящее 0,01: . Наименьшее значение , удовлетворяющее неравенству , это . Значит, чтобы вычислить сумму ряда с заданной точностью, достаточно взять 9 слагаемых: .

**Самостоятельная работа:**

21.4.3. Проверить знакочередующиеся ряды на абсолютную и условную сходимость: а) ; б) ; в) ; г) ; д) ; е) ; ж) ; з) ; и) ;

21.4.4. Кроме знакочередующихся рядов существуют и другие знакопеременные ряды – ряды, в которых присутствуют как положительные, так и отрицательные члены, но они не чередуются. Используя наиболее подходящие признаки проверить абсолютную сходимость рядов: а) ; б) ;

**Ответы:**

**21.4.3.** а), д) – расходятся; в), е), ж), и) – сходятся условно; б), г), з) – сходятся абсолютно;

**21.4.4.** а) ; ; по признаку сравнения ряд  сходится, значит, ряд  сходится абсолютно; б) , ряд расходится;